This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
900000030350

Or 379

MÉMOIRE

SUR

LA QUESTION

Un corps étant suspendu à l'extrémité d'une corde dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe, si on lui fait décrire un arc de cercle quelconque autour de l'extrémité fixe, et qu'on lui imprime en outre un mouvement de projection, on demande la nature de la courbe à double courbure que décrira ce corps dans l'hypothèse de la résistance de l'air, en raison du quarré de la vitesse.

PAR M. J. P. PIRARD, INGÉNIEUR DU WATERSTAAT A NAMUR.

Ut ab investigatis naturæ viribus,
demonstremus phœnomena reliqua.
NEWTON, Prin. præf.

BRUXELLES,
P. J. DE MAT, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BRUXELLES
ET DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN.

1822.

MÉMOIRE

SUR

LA QUESTION :

Un corps étant suspendu à l'extrémité d'une corde dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe, si on lui fait décrire un arc de cercle quelconque autour de l'extrémité fixe et qu'on lui imprime en outre un mouvement de projection, on demande la nature de la courbe à double courbure que décrira ce corps dans l'hypothèse de la résistance de l'air, en raison du quarré de la vitesse.

Nous commencerons par supposer que le corps est un point matériel assujetti à rester sur une sphère, dont le rayon représenté par r, sera la distance de ce corps au point de suspension; nous rapporterons à des coordonnées rectangulaires les divers lieux géométriques que nous aurons à considérer; nous prendrons pour plan des xy le plan horizontal passant par le point d'attache; pour axe des z, la verticale de ce même point; pour côté des z positifs. celui qui est tourné vers le zénith, et afin de simplifier autant que possible, nous ferons passer le plan des zx par le point de départ du corps.

Ce point de départ sera fixé de position dès qu'on donnera sa hauteur c au-dessus du plan des xy; car ses trois coordonnées seront alors $z=c$, $y=o$ et $x=\sqrt{r^2-c^2}$ expression que, pour abréger, nous représenterons par a.

Soit f l'espace que la vitesse ferait parcourir au corps dans une seconde, en supposant celui-ci entièrement libre,

α, β, γ les trois angles que la direction de cette vitesse fait avec les axes des coordonnées : si, suivant ce que l'énoncé du problème semble indiquer, cette direction est comprise dans le plan tangent, on aura

$$\frac{a}{r}\cos\alpha + \frac{o}{r}\cos\beta + \frac{c}{r}\cos\gamma = o,$$

relation qui exprime que le cosinus de l'angle de la vitesse initiale avec le rayon de la sphère, est égale à zéro, en observant que $\frac{a}{r}$, $\frac{o}{r}$ et $\frac{c}{r}$ expriment les cosinus des angles entre la normale au point qu'on considère et les axes : combinant cette équation avec la relation connue

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on trouvera

$$\cos\alpha = -\frac{c}{a}\cos\gamma, \cos\beta = \sqrt{1 - \cos^2\gamma - \frac{c^2}{a^2}\cos^2\gamma}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - (a^2 + c^2)\cos^2\gamma} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - r^2\cos^2\gamma} = \frac{b}{a},$$

en représentant le radical par b.

Mais si la direction de l'impulsion initiale, était oblique au plan tangent et si elle faisait avec la normale un angle δ, et avec les axes des x, y, z des angles α', β' et γ', que f' fut alors la mesure linéaire de la vitesse qui lui est due, on aurait cette relation connue

$$\cos\delta = \frac{a}{r}\cos\alpha' + \frac{o}{r}\cos\beta' + \frac{c}{r}\cos\gamma',$$

et l'on décomposerait ensuite la vitesse donnée en deux autres, l'une $f'\cos\delta$ dirigée suivant le rayon, et l'autre $f'\sin\delta$ qui serait comprise dans le plan tangent.

Dans le cas où la première composante $f' \cos \delta$ ne se trouverait point détruite, le corps décrirait une portion de la courbe des projectiles libres, et vu que cette courbe est étrangère au problème actuel, nous supposerons, pour n'avoir point à nous en occuper, que la force normale est toujours dirigée vers l'extérieur de la sphère; la force $f' \cos \delta$ se trouvera alors annullée par la résistance du fil; l'autre composante $f' \sin \delta$ pourra être considérée comme la vitesse que nous avons appellée f, et il s'agira d'exprimer les angles α, β, γ que cette vitesse f doit faire avec les axes, au moyen des angles analogues α', β', γ' donnés par la vitesse f'.

On y parviendra facilement en mettant en équations la condition de statique dont voici l'énoncé : si l'on décompose parallèlement à chacun des trois axes, 1° les deux vitesses $f' \sin \delta, f' \cos \delta$ qui peuvent remplacer la vitesse f', 2° cette vitesse f' elle-même, la somme des composantes de $f' \sin \delta$ et de $f' \cos \delta$ relatives à l'un quelconque de ces axes, doit reproduire la composante de f' qui lui correspond; ce principe donne

$$f' \sin \delta . \cos \alpha + \frac{a}{r} f' \cos \delta = f' \cos \alpha'$$

$$f' \sin \delta . \cos \beta + \frac{o}{r} f' \cos \delta = f' \cos \beta'$$

$$f' \sin \delta . \cos \gamma + \frac{c}{r} f' \cos \delta = f' \cos \gamma';$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha'}{\sin \delta} - \frac{a}{r} \cot \delta$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \beta'}{\sin \delta}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos \gamma'}{\sin \delta} - \frac{c}{r} \cot \delta.$$

Au moyen de ces équations jointes à $f' \sin \delta = f$ et à celles qui précèdent, toutes les données du problème pourront toujours se ramener aux quatre suivantes :

r rayon de la sphère du mouvement,

c hauteur du corps au-dessus du plan horizontal du point de suspension, laquelle, étant négative dans le problème proposé, devient une distance verticale en dessous de ce plan,

f vitesse tangentielle imprimée au corps,

γ distance angulaire au zénith de la direction de cette vitesse.

Pour ne rien négliger de ce qui peut donner une idée précise de ces diverses quantités, on pourra observer que, puisque $f\cos\alpha$, $f\cos\beta$, $f\cos\gamma$ sont les composantes de la vitesse tangentielle suivant des directions parallèles aux axes, on devra avoir pour les premiers termes des développemens des coordonnées suivant les puissances du temps :

$$\left.\begin{aligned} x &= a + f\cos\alpha.\, t + \text{etc.} \\ &= a - \frac{c}{a} f\cos\gamma.\, t + \text{etc.} \\ y &= f\cos\beta.\, t + \text{etc.} = \frac{b}{a} f.\, t + \text{etc.} \\ z &= c + f\cos\gamma.\, t + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (A)$$

Représentons-nous maintenant ce qui doit arriver dans un instant quelconque du mouvement : le point mobile sera alors sollicité, 1° par la gravité, 2° par la résistance qu'il éprouve à sortir de la surface sphérique dont le rayon est r, 3° par la résistance de l'air. Nous allons chercher les expressions de ces forces et de leurs composantes parallèles aux axes, dans l'ordre où nous venons de les énumérer.

1°. La force accélératrice de la pesanteur n'ayant point de composantes dans le sens des x ni dans celui des y, donnera seulement $-g$ parallèle aux z, en désignant par $g\,(=9{,}8088)$ le double de l'espace que parcourent les corps graves dans la première seconde de leur chute libre.

2°. La condition que le corps ne peut sortir de la surface d'une sphère, revient à l'hypothèse d'une force normale n ayant à chaque instant le degré d'intensité nécessaire pour le maintenir dans la surface sphérique. Comme cette force est constamment dirigée suivant le rayon, ses composantes parallèles aux axes, seront $\frac{nx}{r}$, $\frac{ny}{r}$, $\frac{nz}{r}$, en observant que $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et $\frac{z}{r}$ représentent les cosinus des angles entre la normale et les axes.

3°. La résistance de l'air devant être proportionnelle au quarré de la vitesse, nous remarquerons qu'en représentant par s l'arc parcouru pendant le temps t, l'on aura d'abord $\frac{ds}{dt}$ pour l'expression de cette vitesse, et que si, pour plus de commodité, nous faisons $\frac{ds}{dt} = s_1$, la résistance, dont il s'agit, pourra être exprimée par $\pm \varepsilon s_1^2$, ε étant un coéfficient numérique dont nous chercherons la valeur après que nous aurons déterminé son signe.

En représentant d'une manière analogue $\frac{dx}{dt}$ par x_1, $\frac{dy}{dt}$ par y_1, et $\frac{dz}{dt}$ par z_1, l'élément de la courbe parcourue aura pour cosinus des angles, qu'il doit faire avec les axes, les rapports $\frac{x_1}{s_1}$, $\frac{y_1}{s_1}$, $\frac{z_1}{s_1}$.

Cherchons maintenant à décomposer suivant cet élément les

trois forces qui agissent à chaque instant sur le point mobile; 1° puisque la verticale fait avec cet élement un angle dont le cosinus est $\frac{z_1}{s_1}$, la composante relative à la gravité, sera $-g\frac{z_1}{s_1}$: 2° la composante de la résistance du fil sera zéro, vu que cette force agit perpendiculairement à la tangente : 3° la troisième composante, savoir celle de la résistance de l'air, sera par hypothèse $\pm \epsilon s_1^2$: il viendra donc en somme $-g\frac{z_1}{s_1} \pm \epsilon s_1^2$, pour toutes les forces décomposées suivant l'élément de la courbe; or cette somme doit équivaloir au coéfficient différentiel $\frac{d^2 s}{dt^2}$, que nous représenterons par s_2; on aura donc

$$s_2 = -g\frac{z_1}{s_1} \pm \epsilon s_1^2.$$

Faisons attention maintenant que quand t devient $t+\theta$, s doit devenir

$$s + s_1\theta + s_2\frac{\theta^2}{2} + \text{etc.},$$

c'est-à-dire que, pendant le temps θ qui suit le temps t, l'arc doit s'accroître de

$$s_1\theta + s_2\frac{\theta^2}{2} + \text{etc.}$$

Par la substitution de $-g\frac{z_1}{s_1} \pm \epsilon s_1^2$ au lieu de s_2, cette expression se change en

$$s_1\theta + \left(-g\frac{z_1}{s_1} \pm \epsilon s_1^2\right)\frac{\theta^2}{2} + \text{etc.}$$

Or la résistance de l'air ayant pour effet de rendre l'accroissement de l'arc plus petit qu'il ne le serait sans elle, et cet effet devant subsister quelle que puisse être la petitesse de θ, il faut évidemment que le terme $\pm \varepsilon s_1^2$ soit pris avec le signe inférieur ou que ε soit affecté du signe —.

La détermination numérique d'ε dépend des propositions suivantes qui sont assez connues, mais dont au besoin on pourrait voir la démonstration aux chap. 1^ers^ des 2^e^ et 3^e^ parties du petit ouvrage d'Euler intitulé : *Théorie de la manœuvre et de la construction des vaisseaux.*

Une surface plane qui, plongée dans l'eau, se meut dans une direction perpendiculaire à elle-même et avec une vitesse s_1, éprouve de la part du liquide une pression rétardatrice qu'on peut mesurer par un poids, et ce poids est celui d'un volume d'eau qui aurait la surface plane pour base, et pour hauteur, celle dont un corps devrait tomber pour acquérir la vitesse s_1; de sorte qu'en appellant m^2 l'étendue de la surface, la pression rétardatrice est $\frac{m^2 s_1^2}{2g}$; pour vérifier que $\frac{s_1^2}{2g}$ exprime réellement la hauteur mentionnée, il suffira de se rappeller qu'un corps pesant, supposé parti du repos et qui aura acquis dans sa chute la vitesse gt après le temps t, devra pendant ce temps avoir parcouru l'espace $\frac{1}{2}gt^2$; or en faisant $gt = s_1$ et $\frac{1}{2}gt^2 = e$, on a effectivement $e = \frac{s_1^2}{2g}$ (voy. la note pag. 11).

Les pressions rétardatrices exercées dans des circonstances pareilles par des fluides de diverses natures, sont comme les densités de ces fluides, de sorte que pour transporter à l'air atmosphérique ce que nous venons de dire de l'eau,

il faudra multiplier $\frac{m^2 s_1^2}{2g}$ par la densité Δ de l'atmosphère; cette densité, lorsque le baromètre est à 0,76, le thermomètre à 0° et que l'hygromètre marque sécheresse extrême, vaut sensiblement 0,00013; nous négligeons comme trop minutieuses pour notre objet les petites corrections de latitude et d'élévation du lieu au-dessus de la mer.

La troisième proposition consiste en ce que, dans le cas général où la direction du mouvement de la surface fait avec elle un angle φ, il faut de plus multiplier $\frac{m^2 s_1^2 \Delta}{2g}$ par $\sin^3\varphi$.

Pour appliquer ces principes, nous ne pouvons plus regarder la masse du corps oscillant comme réunie à son centre de gravité; en conséquence, nous prendrons pour mobile une sphère dont le rayon soit ρ; chacun des élémens de cette sphère sera une petite surface plane qui, à chaque instant, pourra être regardée comme se mouvant sur un arc concentrique à celui qui est décrit par le centre de gravité et comme ayant sensiblement la même vitesse que ce centre (1); il ne s'agira donc que de faire la somme des pressions $\frac{m^2 s_1^2 \Delta}{2g} \cdot \sin^3\varphi$ pour

(1) Nous supposons du moins qu'il soit permis de faire cette simplification; il serait très-facile de compliquer le problème en donnant au corps une figure quelconque, exigeant que l'on cherchât son centre d'oscillation, le centre de résistance de l'air, que l'on tînt compte des mouvemens rotatoires qui pourraient exister ou naître, etc.; on a présumé, d'après l'énoncé, qu'il n'était pas nécessaire de se jeter dans des calculs aussi longs que pour les plus grands problèmes de l'astronomie, et l'assentiment de l'Académie a confirmé cette conjecture.

tous les élémens de l'hémisphère exposée à la résistance de l'air.

Qu'on se figure une zône infiniment petite à la distance u du cercle qui limite l'hémisphère en question, cette distance étant supposée mesurée sur la surface même; la hauteur de la zône sera la différentielle de $\rho \sin u$; sa surface devra se trouver en multipliant la circonférence d'un grand cercle $2\pi\rho$ par cette hauteur; son angle avec la direction du mouvement sera égal à l'angle u; en sorte que l'expression à intégrer sera

$$\int \cdot \frac{s_1^2 \Delta}{2g} \cdot 2\pi\rho \cdot \sin^3 u d(\rho \sin u) = \frac{\pi s_1^2 \rho^2 \Delta}{g} \cdot \int \cdot \sin^3 u \cdot d(\sin u)$$

en observant que ρ est constant. On a donc pour l'intégrale cherchée

$$\frac{s_1^2 \pi \rho^2 \Delta}{4g} \cdot \sin^4 u + C,$$

laquelle prise depuis $u = 90^\circ$ jusqu'à $u = 0$, se réduit à $\frac{s_1^2 \pi \rho^2 \Delta}{4g}$. En multipliant $\frac{s_1^2 \pi \rho^2 \Delta}{4g}$ par g (1), on a la résistance du milieu, c'est-à-dire, la force motrice que nous désignerons par ψ : pour en déduire la force accélératrice g', il faut diviser ψ par la masse du corps, qui est $\frac{4}{3}\pi\rho^3 D$, D étant sa densité : on a donc ainsi

(1) L'auteur du mémoire a omis (pag. 9) le facteur g qui doit multiplier $\frac{m^2 s_1^4}{2g}$ c'est ce facteur que nous rétablissons ici et qu'il aurait rétabli lui-même, si la mort ne l'eût enlevé aux sciences avant l'impression de son mémoire, circonstance qui a déterminé l'Académie à inviter l'un des membres de la classe à suivre l'impression de ce travail.

$$g' = \frac{3 s_1^2 \pi \rho^3 \Delta}{16 \pi \rho^3 D} = \frac{3}{16 \rho} \cdot \frac{\Delta}{D} \cdot s_1^2,$$

l'on remarquera en même-temps que cette force g' peut être censée appliquée au centre de gravité (1) et que par conséquent l'on pourra de nouveau supposer toute la masse du corps concentrée en ce point. Il suit de cette formule que

$$\varepsilon = \frac{3}{16 \rho} \cdot \frac{\Delta}{D};$$

Par exemple, si le corps est une boule de laiton d'un centième d'aune de rayon, on aura $\rho = 0{,}0013$, $D = 8{,}396$, et en supposant $\Delta = 0{,}0013$, on trouvera pour la valeur d'ε la fraction $0{,}002903$.

Pour obtenir ensuite les composantes de la résistance $-\varepsilon s_1^2$ suivant les trois axes, il n'y aura qu'à la multiplier par les cosinus $\frac{x_1}{s_1}$, $\frac{y_1}{s_1}$, $\frac{z_1}{s_1}$; ce qui donnera $-\varepsilon x_1 s_1$, $-\varepsilon y_1 s_1$, $-\varepsilon z_1 s_1$.

Cela posé, faisons la récapitulation des forces qui sollicitent le corps, pour satisfaire à ce principe de mécanique qu'en différentiant deux fois par rapport au temps l'une quelconque des trois coordonnées d'un point en mouvement, le coéfficient différentiel du second ordre doit équivaloir à la somme des forces accélératrices qui sollicitent ce point parallèlement à l'axe correspondant : en faisant encore pour abréger,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x_1, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = y_1, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = z_1;$$

(1) Voyez la note précédente (pag. 10).

on aura ces équations

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= n\frac{x}{r} - \varepsilon s_1 x_1 \\ y_2 &= n\frac{y}{r} - \varepsilon s_1 y_1 \\ z_2 &= -g + n\frac{z}{r} - \varepsilon s_1 z_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (B):$$

de leur combinaison avec celle de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, doit résulter d'abord l'expression de n. Deux différentiations successives de

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 &= 0 \\ s_1^2 + xx_2 + yy_2 + zz_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (C)$$

donnent

en observant que $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = s_1^2$.

On est conduit par l'inspection de ces résultats, à multiplier la première des équations (B) par x, la deuxième par y, la troisième par z et à faire la somme des produits : cette somme

$$xx_2 + yy_2 + zz_2 = -gz + \frac{n}{r}(x^2 + y^2 + z^2) - \varepsilon s_1 (xx_1 + yy_1 + zz_1)$$

se réduit, au moyen des équations (C), à $-s_1^2 = -gz + nr$; ainsi $n = \frac{gz - s_1^2}{r}$, expression qui substituée dans les équations (B), donne

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{x}{r^2}(gr - s_1^2) - \varepsilon s_1 x_1 \\ y_2 &= \frac{y}{r^2}(gr - s_1^2) - \varepsilon s_1 y_1 \\ z_2 &= -g + \frac{z}{r^2}(gz - s_1^2) - \varepsilon s_1 z_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (D)$$

Telles sont les équations fondamentales du problème; on peut s'en servir d'abord pour prolonger les développemens (A) des coordonnées suivant les puissances du temps; en effet, si l'on convient de renfermer une variable entre parenthèses pour représenter ce qu'elle devient quand $t=o$, on devra avoir

$$x=(x)+(x_1)t+(x_2)\frac{t^2}{2}+(x_3)\frac{t^3}{2.3}+(x_4)\frac{t^4}{2.3.4}+\text{etc.}$$

$$y=(y)+(y_1)t+(y_2)\frac{t^2}{2}+(y_3)\frac{t^3}{2.3}+(y_4)\frac{t^4}{2.3.4}+\text{etc.}$$

$$z=(z)+(z_1)t+(z_2)\frac{t^2}{2}+(z_3)\frac{t^3}{2.3}+(z_4)\frac{t^4}{2.3.4}+\text{etc.}$$

bien entendu que x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4, etc. doivent représenter les coéfficiens différentiels ultérieurs par rapport à t. Or nous savons déjà (A) que

$$(x)=a,(y)=o,(z)=c,(x_1)=-\frac{a}{a}f\cos\gamma,(y_1)=\frac{b}{a}f,(z_1)=f\cos\gamma,$$

d'ailleurs (s_1) représentant la vitesse initiale, on aura $(s_1^2)=2gh=f_1^2$ et $(s_1)=f$: les équations (D) deviennent en y substituant ces valeurs dans l'hypothèse de $t=o$,

$$\left.\begin{aligned}(x_2)&=g\left(\frac{ac-2ah}{r^2}+2\varepsilon h\frac{c}{a}\cos\gamma\right)\\(y_2)&=g\left(-2\varepsilon h\frac{b}{a}\right)\\(z_2)&=g\left(-\frac{a^2+2ch}{r^2}-2\varepsilon h\cos\gamma\right)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\text{(E).}$$

Il est clair que, pour trouver les autres coéfficiens, il n'y

a qu'à différentier ultérieurement les équations (D), éliminer s_1 par la formule

$$s_2 = -g\frac{z_1}{s_1} - \varepsilon s_1^2$$

à mesure que ce coëfficient différentiel se reproduit, et supposer $t = o$ dans les résultats successifs : mais comme les séries que l'on trouverait de cette manière, ne seraient pas généralement assez convergentes, et comme d'ailleurs c'est sous un nombre fini de termes que l'on désire ordinairement les équations d'une courbe que l'on veut construire, nous nous proposerons de faire disparaître ce qui a rapport au temps dans les équations (D).

Si l'on cherchait à effectuer cette opération, en se servant à la fois de nos trois équations telles qu'elles se présentent, on pourrait retomber sur l'équation de la sphère qu'elles renferment virtuellement; on évitera cet inconvénient en ne se servant que de deux d'entr'elles; mais alors celles que l'on employera ne devront contenir que deux variables autres que le temps : on peut remarquer qu'en substituant dans

$$s_1 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

(dérivée de $s_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$), les expressions de x_2, y_2, z_2, on trouve l'équation

$$s_2 = -g\frac{z_1}{s_1} - \varepsilon s_1^2;$$

et que celle-ci par conséquent peut remplacer l'une des trois équations (B); en combinant cette équation avec la dernière

en z_2, on aura les deux suivantes qui ne seront composées qu'en z, s, et les coéfficiens différentiels de ces variables par rapport au temps :

$$\left.\begin{aligned} s_2 &= -g\frac{z_1}{s_1} - \varepsilon s_1^2 \\ z_2 &= -g + \frac{z}{r^2}(gz - s_1^2) - \varepsilon s_1 z_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (F)$$

Il s'agira donc d'en éliminer z_1, s_1, z_2 et s_2 : appelons à cet effet z', z'', z''', etc. les coéfficiens différentiels de z par rapport à s; la théorie des différentiations donnera pour formules auxiliaires : $z_1 = z' s_1$ et $z_2 = z'' s_1^2 + z' s_2$: la première se démontre en observant que quand t devient $t+\theta$, z devient

$$z + z_1\theta + z_2\frac{\theta^2}{2} + \text{etc.}$$

et qu'en même-temps l'arc s'augmente de

$$s_1\theta + s_2\frac{\theta^2}{2} + \text{etc.};$$

si cet accroissement de l'arc est représenté par σ, on aura pour autre expression de ce que devient z :

$$z + z'\sigma + z''\frac{\sigma^2}{2} + \text{etc.};$$

or, ce dernier développement doit se trouver identique avec le précédent, lorsqu'on y aura mis pour σ sa valeur en θ; cette identité donne pour premier résultat $z_1 = z' s_1$; il est visible que l'on pourrait de la même manière démontrer pour les fonctions z', z'', etc. que $z_1' = z'' s_1$, $z_1'' = z''' s_1$, etc. Pour ce

Fig. 1.

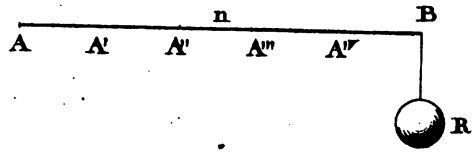


Fig. 2.

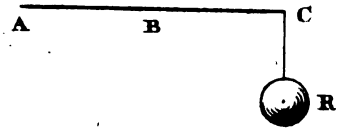


Fig. 3.

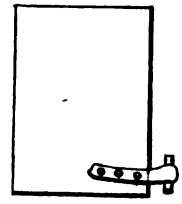


Fig. 4.

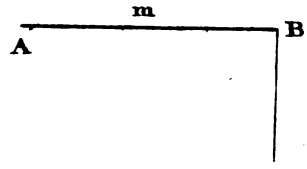
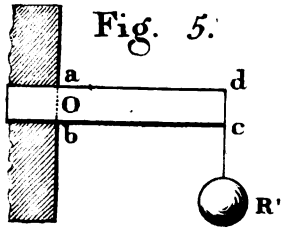


Fig. 5.



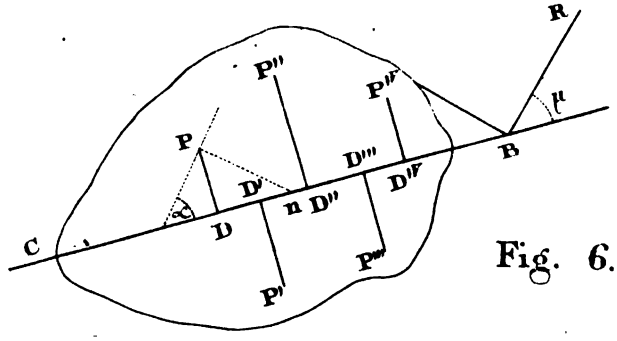
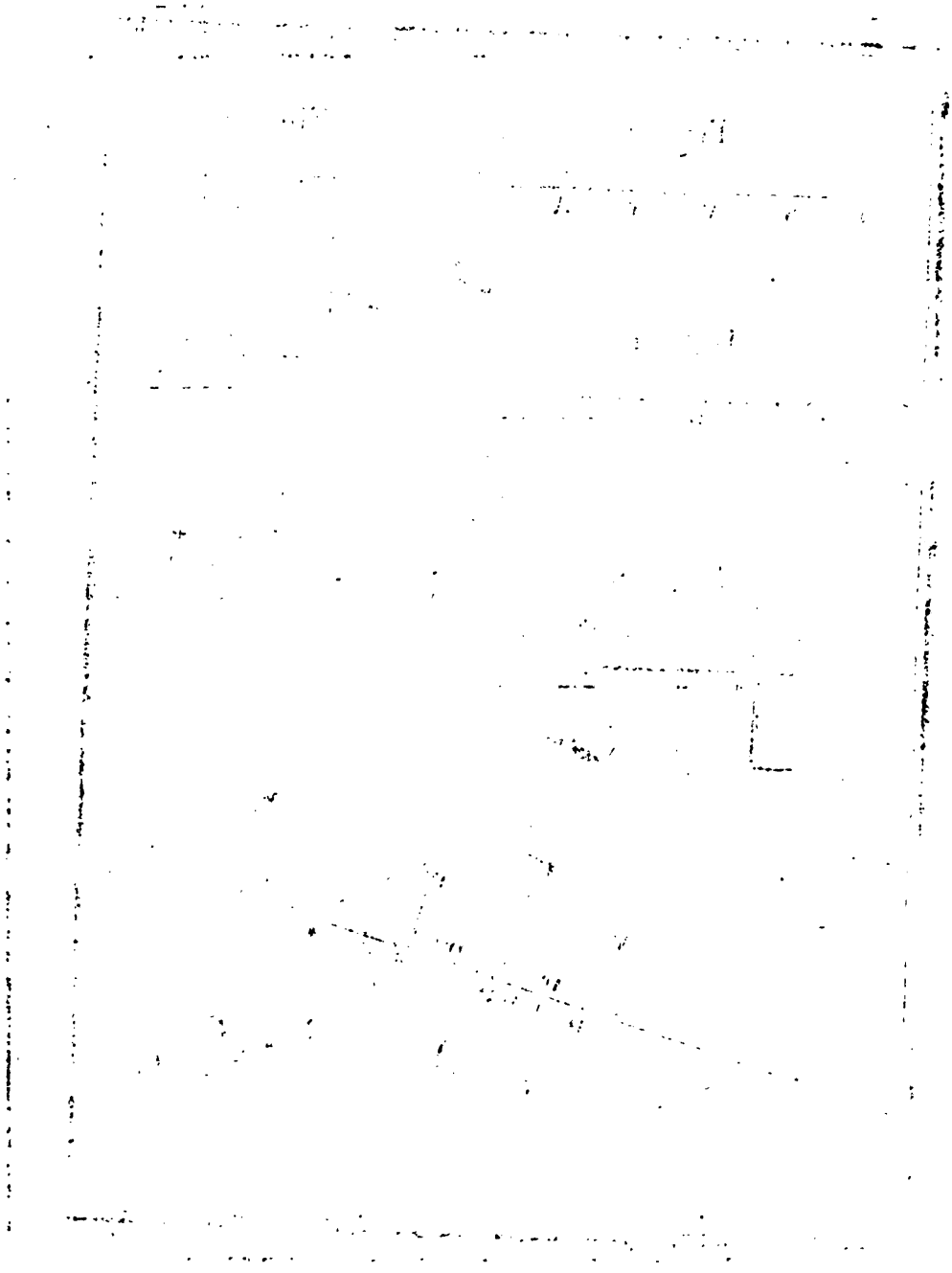


Fig. 6.



qui est de la deuxième formule $z_1 = z''s_1^2 + z's_2$, on peut la trouver en différentiant l'équation $z_1 = z's_1$ par rapport au temps et en y remplaçant z'_1 par $z''s_1$.

La substitution de ces valeurs de z_1 et z_2 dans les équations (F), les change dans celles-ci

$$\left.\begin{aligned} s_2 &= -gz' - \varepsilon s_1^2 \\ z''s_1^2 + z's_2 &= -g + \frac{z}{r^2}(gz - s_1^2) - \varepsilon z' s_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(G)}$$

Mettant dans la deuxième la valeur de s_2 donnée par la première, on a

$$z''s_1^2 - gz'^2 - \varepsilon z' s_1^2 = -g + g\frac{z^2}{r^2} - \frac{z}{r^2}s_1^2 - \varepsilon z' s_1^2;$$

d'où l'on tire

$$s_1^2 = \frac{gz'^2 - g + g\frac{z^2}{r^2}}{z'' + \frac{z}{r^2}} = g \times \frac{r^2 z'^2 + z^2 - r^2}{r^2 z'' + z}.$$

L'élimination resterait incomplette, si l'on n'avait que ces équations; mais on en obtiendra une nouvelle en différentiant l'expression de s_1^2 par rapport au temps : il vient par ce moyen et en faisant usage des équations $z_1 = z's_1$, $z'_1 = z''s_1$, $z''_1 = z'''s_1$,

$$s_2 = g\frac{r^2 z'' z' + zz'}{r^2 z'' + z} - g\frac{(r^2 z'^2 + z^2 - r^2)(r^2 z''' + z')}{2(r^2 z'' + z)^2}$$

où il faut remarquer que le premier terme peut se réduire à gz'. Substituant enfin dans la première équation (G), on obtient

$$gz' - g \times \frac{(r^2 z'^2 + z^2 - r^2)(r^2 z''' + z')}{2(r^2 z'' + z)^2} = -gz' - \varepsilon g \times \frac{r^2 z'^2 + z^2 - r^2}{r^2 z'' + z},$$

et, après avoir fait les réductions convenables,

$$4z'(r^2 z'' + z)^2 = (r^2 z'^2 + z^2 - r^2)[r^2 z''' + z' - 2\varepsilon(r^2 z'' + z)]$$

On trouve le moyen d'intégrer une première fois cette équation, en l'écrivant comme il suit :

$$\frac{r^2 z''' + z'}{r^2 z'' + z} - 2\varepsilon = 2\,\frac{2r^2 z' z'' + 2zz'}{r^2 z'^2 + z^2 - r^2} \quad \ldots\ldots \text{(H)}.$$

Alors le numérateur de chaque fraction est le coéfficient différentiel de son dénominateur, et en se servant de la lettre l pour désigner *les logarithmes népériens*, l'intégration donne :

$$l(r^2 z'' + z) - 2\varepsilon s = 2\,l(r^2 z'^2 + z^2 - r^2) + A$$

et en passant des logarithmes aux nombres,

$$r^2 z'' + z = e^A e^{2\varepsilon s}(r^2 z'^2 + z^2 - r^2)^2.$$

Si s est supposé commencer au point de départ, ou quand $t = o$, il suffira de connaître les valeurs z' et z'' relatives à ce point, pour pouvoir déterminer la constante ; en effet, si (z') et (z'') représentent ces valeurs, il est clair que l'on devra avoir

$$r^2(z'') + c = e^A[r^2(z')^2 + c^2 - r^2]^2;$$

or nous avons vu qu'en général

$$z' = \frac{z_1}{s_1},\ z'' = \frac{z'_1}{s_1} = \frac{z_2}{s_1} - \frac{z_1 s_2}{s_1^3};$$

ce qui donne comme cas particulier

$$(z')=\frac{(z_1)}{(s_1)},\ (z'')=\frac{(z_2)}{(s_1)^2}-\frac{(z_1)(s_2)}{(s_1)^3},$$

et en substituant les expressions déjà connues de $(z_1),(z_2)$, etc. :

$$(z')=\cos\gamma,(z'')=-\frac{a^2+2ch}{2r^2h}-\varepsilon\cos\gamma+\frac{\cos^2\gamma}{2h}+\varepsilon\cos\gamma=-\frac{b^2+2ch}{2r^2h};$$

par conséquent

$$-\frac{b^2+2ch}{2h}+c=e^A(r^2\cos^2\gamma-a^2)^2=e^Ab^4$$

d'où l'on tire cette détermination

$$e^A=-\frac{1}{2b^2h},$$

et $$r^2z''+z=-\frac{1}{2b^2h}e^{2\varepsilon s}(r^2z'^2+z^2-r^2)^2. \ldots, \text{(I)}$$

Suivant la notation ordinaire du calcul différentiel, cette équation serait

$$r^2\frac{d^2z}{ds^2}+z=-\frac{1}{2b^2h}e^{2\varepsilon s}\left(r^2\frac{dz^2}{ds^2}+z^2-r^2\right)^2.$$

Telle parait être la forme la plus simple sous laquelle on puisse obtenir la deuxième équation de la courbe cherchée, la première étant $x^2+y^2+z^2=r^2$.

Les intégrations ultérieures ne paraissant pas possibles par les moyens connus de l'analyse, la question se réduit à chercher le développement de l'équation (I) ou de son équivalente (H) en série approximative. A cet effet, nous commencerons

par généraliser le résultat (H), en rendant z et s fonctions d'une autre variable qu'on pourra choisir à volonté ; l'on sait que pour une fonction quelconque φ de s, une pareille généralisation s'effectue en remplaçant son coéfficient différentiel φ' par $\frac{\delta\varphi}{\delta s}$, les accens désignant dès lors les coéfficiens différentiels par rapport à la nouvelle variable ; soit donc pour abréger z', z'', z''' les expressions que cette opération donnera pour z', z'', z''' ; l'équation (H) se changera par là en :

$$\frac{r^2 z''' + z'}{r^2 z'' + z} - 2\varepsilon = 2\,\frac{2r^2 z'' z' + 2zz'}{r^2 z'^2 + z^2 - r^2} \ldots\ldots\ldots \text{(K)}.$$

La longueur de l'arc s étant une donnée qui ne peut que difficilement servir pour la construction de la courbe, nous nous proposerons pour cette raison d'introduire en sa place l'angle de rotation horizontale du fil qui soutient le corps, angle préféré dans le cas actuel, par la raison qu'il suit l'arc s dans ses accroissemens positifs ou négatifs ; la relation de ce même angle avec les coordonnées se découvrira facilement, en considérant qu'il fait partie du systême de coordonnées polaires, auxquelles on peut rapporter la projection horizontale de la courbe.

Imaginons cette projection faite sur le plan des xy, et prenons l'origine des coordonnées rectangulaires pour origine des coordonnées polaires ; soient v le rayon vecteur d'un point quelconque de la projection et u l'angle qu'il fait avec l'axe des x ; on aura évidemment

$$x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ \text{et}\ v = \sqrt{r^2 - z^2}$$

Nous prendrons u pour la nouvelle variable indépendante,

c'est-à-dire, pour celle par rapport à laquelle nous différentierons, et nous aurons d'abord à chercher quelle sera, dans cette hypothèse, la valeur de s' afin de pouvoir la substituer dans l'expression $\frac{z'}{s'}$, valeur de z'; on sait qu'en général s' est égal à $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$; or ici

$$x'=v'\cos u - v\sin u, y'=v'\sin u + v'\cos u, v'=-\frac{zz'}{\sqrt{r^2-z^2}};$$

il en résulte :

$$s'=\sqrt{v'^2+v^2+z'^2}=\sqrt{r^2-z^2+\frac{r^2z'^2}{r^2-z^2}}$$

Le radical se simplifiera un peu, en faisant $v=r\sin p$, $z=r\cos p$, ce qui revient à représenter par p l'angle que fait le fil de suspension avec la verticale; s' se réduit alors à $r\sqrt{\sin^2 p+p'^2}$, et il vient pour z'

$$z'=\frac{z'}{s'}=-\frac{p'\sin p.}{\sqrt{\sin^2 p+p'^2}}.$$

Pour déduire de là le plus commodément possible les quantités à substituer dans l'équation (K), nous commencerons par composer en fonction de p la valeur de $r^2z'^2+z^2-r^2$; on trouve assez facilement qu'elle est $-\frac{r^2\sin^4 p}{\sin^2 p+p'^2}$; nous représenterons cette expression prise positivement par une seule lettre q, afin de rendre plus simples quelques-unes des équations que nous avons à écrire.

Si l'on prend par rapport à u le coéfficient différentiel de l'equation $r^2z'^2+z^2-r^2=-q$, si l'on divise tous ses

termes par s', et qu'on observe que $\frac{z'}{s'} = z'$ et que $\frac{(z')'}{s'} = z''$, on aura $2r^2 z' z'' + 2zz' = -\frac{q'}{s'}$; c'est l'expression du numérateur du second membre de (K). En divisant membre à membre cette dernière équation par $2z' = \frac{2z'}{s'}$, il vient $r^2 z'' + z = -\frac{q'}{2z'}$; expression du dénominateur de la première fraction de (K) : on obtient le numérateur de la même fraction en différentiant encore par rapport à u et divisant par s'; ce qui donne :

$$r^2 z''' + z' = -\frac{1}{2s'}\left(\frac{q''}{z'} - \frac{q'z''}{z'^2}\right).$$

Effectuant donc les substitutions dans l'équation (K), on obtiendra :

$$\frac{q''}{q'} - 2\frac{q'}{q} - \frac{z''}{z'} - 2s's' = 0. \ldots\ldots \text{(L)}$$

Or il est évident que les trois premiers termes sont le coëfficient différentiel logarithmique de $\frac{q'}{q^2 z'}$, et si l'on observe de plus, pour faciliter la substitution de la valeur de q, que

$$\frac{q'}{q^2 z'} = -\frac{1}{z'}\left(\frac{1}{q}\right)',$$

on trouve aisément

$$\frac{q'}{q^2 z'} = -\frac{2}{r^3 \sin^6 p.}\left(\sin^2 p.\cos p + 2p'^2 \cos p. - p''. \sin p\right):$$

après avoir remplacé z' puis z et z' dans q par leurs valeurs,

puis prenant la différentielle logarithmique pour former le premier membre de (L), on aura :

$$-6\cot p.p' + \frac{\sin p.p''' - 3\cos p.p'p'' + 2\sin p.p'^3 + \sin^3 p.p' - 2\sin p.\cos^2 p.p'}{\sin p.p'' - 2\cos p.p'^2 - \sin^3 p.\cos p} - 2\varepsilon r\sqrt{\sin^2 p + p'^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$p''' = 3\cot p.p'p'' - 2p'^3 - \sin^2 p.p' + 2\cos^2 p.p' + (p'' - \cot p.p'^2 - \sin p.\cos p)(6\cot p,p' + 2\varepsilon r\sqrt{\sin^2 p + p'^2}). \quad (M)$$

Ce résultat nous met à même de pouvoir déduire toutes les valeurs des coéfficiens de la série

$$p = (p) + (p')u + (p'')\frac{u^2}{2} + (p''')\frac{u^3}{2.3} + (p'''')\frac{u^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

des seules valeurs de (p), (p'), (p''). Quant à ces dernières, on obtiendra d'abord (p) par l'équation $v = r\sin p$; car, puisque $u = 0$ quand $t = 0$, et qu'au même instant $v = x = a$, on doit avoir $\sin(p) = \frac{a}{r}$. Pour trouver (p') et (p''), il faudra recourir aux équations auxiliaires données par la théorie des différentiations, savoir

$$p' = \frac{p_1}{u_1}, \quad p'' = \frac{p_2}{u_1^2} - \frac{p_1 u_2}{u_1^3},$$

où p_1, u_1, p_2, u_2 représentent des coéfficiens différentiels par rapport au temps; quoique les valeurs de p_1, u_1, p_2, u_2 ne soient pas connues directement pour $t = 0$, au moins l'on sait ce que valent à cet instant x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, et s_2. (voyez les équations (E) et celles qui les précèdent); il suffira donc de pouvoir exprimer p_1, u_1, p_2 et u_2, en x, y, z et leurs coéfficiens différentiels par rapport au temps.

On sait que $x=v\cos u$, $y=v\sin u$, et nous avons supposé $z=r\cos p$; il est très facile d'en déduire

$$\text{tang } u=\frac{y}{x},\ \cos p=\frac{z}{r},$$

d'où

$$u=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right),\ p=\text{arc}\left(\cos=\frac{z}{r}\right)$$

$$u_1=\frac{xy_1-yx_1}{x^2+y^2}=\frac{xy_1-yx_1}{r^2-z^2},\quad p_1=-\frac{z_1}{\sqrt{r^2-z^2}},$$

$$u_2=\frac{xy_2-yx_2}{r^2-z^2}+\frac{2zz_1(xy_1-yx_1)}{(r^2-z^2)^2}=\frac{xy_1-yx_1}{(r^2-z^2)^2}[2zz_1-\varepsilon s_1(r^2-z^2)]$$

$$p_2=-\frac{z_2}{\sqrt{r^2-z^2}}-\frac{zz_1^2}{(r^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}=-(r^2-z^2)^{-\frac{3}{2}}[zz_1^2+z_2(r^2-z^2)]$$

$$p'=-\frac{z_1\sqrt{r^2-z^2}}{xy_1-yx_1},\ p''=\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{(xy_1-yx_1)^2}[zz_1^2-(z_2+\varepsilon s_1z_1)(r^2-z^2)]$$

et par conséquent

$$(p')=-\frac{a}{b}\cos\gamma,(p'')=-\frac{a}{b^2}\left(c\cos^2\gamma+\frac{a^2c}{r^2}+\frac{a^4}{2r^2h}\right).$$

Lorsqu'on fera les substitutions de ces valeurs dans l'équation (M) et ses dérivées, on pourra en même-temps mettre pour sin (p), cos (p) et cot (p) leurs valeurs respectives $\frac{a}{r}$, $\frac{c}{r}$ et $\frac{c}{a}$. Tout sera par là connu dans la série (N), et si l'on appelle U la somme des termes qui complètent (p), on aura

$$v=r\sin[(p)+\text{U}]=c\sin\text{U}+a\cos\text{U}$$
$$z=r\cos[(p)+\text{U}]=c\cos\text{U}-a\sin\text{U}$$

Pour déterminer la vitesse du mobile à chaque instant, nous reprendrons les équations (F) où cette vitesse s_1 entre comme inconnue avec l'ordonnée z; mais afin de mieux faire ressortir la manière dont elle se trouvera combinée comme vitesse dans les expressions dont elle pourra faire partie, nous la représenterons par v et nous aurons

$$v_1 = -g\frac{z}{v} - \varepsilon v^2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(O)}$$

$$z_1 = -g + \frac{z}{r^2}(gz - v^2) - \varepsilon v z_1 \quad \text{(P)}$$

Il est clair qu'avec ces données, le parti le plus simple est de chercher v en fonction de z; soient donc v', v'', v''', etc. les coéfficiens différentiels de v par rapport à z; l'équation (O) donnera par le moyen de l'auxiliaire $v_1 = v'z_1$

$$z_1 = -\frac{\varepsilon v^3}{vv' + g} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(Q)}$$

et en différentiant celle-ci par rapport au temps :

$$\begin{aligned} z_2 &= -\frac{3\varepsilon v^2 v'}{vv' + g} z_1 + \frac{\varepsilon v^3 (vv'' + v'^2)}{(vv' + g)^2} z_1 \\ &= \frac{\varepsilon v^4 v'' - 2\varepsilon v^3 v'^2 - 3\varepsilon g v^2 v'}{(vv' + g)^2} \cdot z_1 \\ &= -\frac{\varepsilon v^5}{(vv' + g)^3}(v^2 v'' - 2vv' - 3gv'); \end{aligned}$$

enfin, par les substitutions dans l'équation (P), on obtiendra

$$-\frac{\varepsilon v^5}{(vv' + g)^3}(v^2 v'' - 2vv' - 3gv') = -g + \frac{z}{r^2}(gz - v^2) + \varepsilon^2 \frac{v^4}{vv' + g},$$

Cette équation servira à déterminer les valeurs de v'', v''', etc.,

pour tous les cas où l'on connaitra celles de v, v' et z; si l'on représente donc par (v), (v'), (v''), etc. ce que deviennent ces diverses fonctions au commencement du mouvement ou quand $z=c$, on pourra calculer la série

$$v=(v)+(v')(z-c)+(v'')\frac{(z-c)^2}{2}+(v''')\frac{(z-c)^3}{2.3}+\text{etc.}$$

dès que l'on connaitra (v) et (v'). Or l'on sait qu'au commencement du mouvement la vitesse v est égale à f; ainsi $(v)=f$. De plus l'équation (Q) donne

$$v'=-\frac{g}{v}-\varepsilon\frac{v^2}{z_1},$$

et puisque $z_1=f\cos\gamma$, quand $v=f$, il s'ensuit que

$$(v')=-\frac{g}{f}-\varepsilon\frac{f}{\cos\gamma}.$$

Il ne serait pas impossible de trouver pour v une série plus convergente que la précédente; l'on voit même assez qu'un développement qui procéderait suivant les puissances de la fraction ε, pourrait particulièrement servir à ce but. Si nous voulons nous proposer la recherche d'un tel développement, nous devons partir du cas où $\varepsilon=0$; l'équation (O) ou son équivalente (Q) donne alors $vv'+g=0$, et par l'intégration, $\frac{1}{2}v^2+gz+\varkappa=0$, $\varkappa$ étant la constante à déterminer : de ce que l'on doit avoir à la fois $z=c$ et $v=f$, il suit que cette constante a pour valeur $-\frac{1}{2}f^2-gc$, et que, pour le cas particulier dont il s'agit, $v^2=f^2+2gc-2gz$.

En généralisant et posant

$$v^2=A+B\varepsilon+C\varepsilon^2+\text{etc.},$$

A sera égal à $f^2 + 2gc - 2gz$, tandis que les coéfficiens B, C, etc. seront d'autres fonctions de z qu'il s'agira de découvrir : nous nous bornerons ici, vu la petitesse d'ε, à la détermination de B.

Nous chercherons dans cette vue les développemens de z_1 et z_2 suivant les puissances d'ε pour les substituer dans l'équation (P); par ces substitutions et celles des valeurs de v' et de v, les deux membres de cette équation deviendront des séries qu'on ordonnera suivant les puissances d'ε; et, comme ces deux développemens devront alors être identiques, on aura, par la comparaison des termes des mêmes puissances d'ε, une suite d'équations entre A, B, C, etc. Il vient d'abord, en cherchant à effectuer ces opérations,

$$z_1 = -\frac{\varepsilon v^3}{vv' + g} = -\varepsilon \frac{A^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} A^{\frac{1}{2}} B\varepsilon + \text{etc.}}{vv' + g}$$

la différentiation de

$$v^2 = A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 + \text{etc.}$$

donne :

$$vv' = \frac{1}{2} A' + \frac{1}{2} B'\varepsilon + \frac{1}{2} C'\varepsilon^2 + \text{etc.}$$

et comme $A' = -2g$, on a

$$vv' + g = \frac{1}{2} B'\varepsilon + \frac{1}{2} C'\varepsilon^2 + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots \text{(R)}$$

ainsi :

$$z_1 = -2\frac{A^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}A^{\frac{1}{2}}B\varepsilon + \text{etc.}}{B' + C'\varepsilon + \text{etc.}} = -2\frac{A^{\frac{3}{2}}}{B'} + \text{etc.}$$

$$z_2 = \left(-3\frac{A^{\frac{1}{2}}A'}{B'} + 2\frac{B''A^{\frac{3}{2}}}{B'^2}\right)z_1 + \text{etc.}$$

$$= 6\frac{A^2A'}{B'^2} - 4\frac{B''A^3}{B'^3} + \text{etc.}$$

En faisant les substitutions mentionnées et ne conservant que les termes sans ε, on obtient

$$6\frac{A^2A'}{B'^2} - 4\frac{A^3B''}{B'^3} = -g + \frac{z}{r^2}(gz - A);$$

cette équation se transforme, par la supposition de $\frac{1}{B'^2} = \varphi$, en

$$6A^2A'\varphi + 2A^3\varphi' = -g + \frac{z}{r^2}(gz - A).$$

Si le second membre était nul, on trouverait de suite

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -3\frac{A'}{A},\quad l\varphi = -3lA + \text{const.},\quad \varphi = A^{-3} \times \text{const.};$$

soit donc $\varphi = \mu A^{-3}$, μ étant une fonction de z; la substitution donnera

$$6\mu A^{-1}A' - 6\mu A^{-1}A' + 2\mu' = -g + \frac{z}{r^2}(gz - A)$$

et par conséquent

$$\mu' = -\frac{1}{2}g + \frac{z}{2r^2}(gz - A)$$

$$\mu = \int\left[-\frac{1}{2}g + \frac{z}{2r^2}(gz - A)\right]dz,$$

On pourra intégrer, en tirant de l'équation $f^2 + 2gc - 2gz = A$ l'expression de z en fonction de A; il vient de cette manière

$$z = c + \frac{f^2 - A}{2g} = c + h - \frac{A}{2g},\quad dz = -\frac{dA}{2g},$$

$$\mu = \frac{1}{4r^2}\int\left[a^2 - 2ch - h^2 + 2(c+h)\frac{A}{g} - \frac{3}{4}\cdot\frac{A^2}{g^2}\right]dA$$

$$= \frac{1}{4r^2}\left[K + (a^2 - 2ch - h^2)A + (c+h)\frac{A^2}{g} - \frac{1}{4}\cdot\frac{A^3}{g^2}\right],$$

et il en résulte pour B'

$$B' = \sqrt{\frac{1}{\varphi}} = \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

$$= \frac{2rA^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{K + (a^2 - 2ch - h^2)A + (c+h)\frac{A^2}{g} - \frac{1}{4}\cdot\frac{A^3}{g^2}}}. \quad \ldots \quad (S)$$

La détermination de la constante K exige que l'on connaisse ce que devient B', quand $z = c$; pour trouver cette valeur que nous représenterons par (B'), reprenons l'équation (R); elle nous donnera, pour le cas de $z = c$,

$$(v)(v') + g = \frac{1}{2}(B')_c + \text{etc.},$$

où (υ) et (υ') sont encore les mêmes coéfficiens pour lesquels nous avons déjà trouvé

$$(\upsilon)=f \text{ et } (\upsilon')=-\frac{g}{f}-\frac{\varepsilon f}{\cos\gamma};$$

on obtient par le moyen de ces expressions

$$(B')=-\frac{2f^2}{\cos\gamma}+\text{etc.},$$

et comme B′ doit être indépendant d'ε, on a simplement

$$(B')=-\frac{2f^2}{\cos\gamma};$$

mais, dans la même hypothèse de $z=c$, la constante A se réduit à f^2; il faut donc que l'on ait l'équation de condition

$$-\frac{2f^2}{\cos\gamma}=\frac{2rf^2}{\sqrt{K+(a^2-2ch-h^2)f^2+2(c+h)f^2h-f^2h^2}}$$

elle se réduit par la destruction mutuelle des termes du radical à

$$-\frac{1}{\cos\gamma}=\frac{rf}{\sqrt{K+a^2f^2}},$$

d'où l'on tire

$$K=r^2f^2\cos^2\gamma-a^2f^2=-b^2f^2.$$

Si l'on observe que $B'=\frac{dB}{dz}$ et que $\frac{dA}{dz}=2g$, d'où $dz=\frac{dA}{2g}$, on tirera de l'équation (S),

$$B=-\frac{1}{2g}\int\frac{2rA^{\frac{3}{2}}dA}{\sqrt{-b^2f^2+(a^2-2ch-h^2)A+(c+h)\frac{A^2}{g}-\frac{1}{4}\frac{A^4}{g^2}}}$$

$$=-\frac{r}{g}\int\frac{A^2dA}{\sqrt{-b^2f^2A+(a^2-2ch-h^2)A^2+(c+h)\frac{A^3}{g}-\frac{1}{4}\frac{A^4}{g^2}}}.$$

Cette intégrale étant du genre de celles qui se ramenent facilement aux *transcendantes elliptiques* (V. Legendre, *exercices de calcul intégral*), nous nous contenterons de faire observer, relativement à la constante à introduire, que B doit être nul quand $A=f^2$.

Si c'était en fonction du temps que l'on voulut chercher la vitesse, il faudrait d'abord éliminer z entre l'équation (P) et sa différentielle prise par rapport au temps; l'on obtiendrait une équation où entreraient encore z_1, z_2 et z_3; mais l'équation (O) donnerait en même-temps

$$z_1=-\frac{v}{g}(v_1+\varepsilon v^2),$$

d'où l'on déduirait z_2 et z_3, et par la substitution des expressions de ces coéfficiens différentiels dans le résultat de l'élimination précédente, on parviendrait à une équation entre v, v_1, v_2, v_3.

Pour completter la solution du problème, on peut aussi se proposer de chercher les équations des projections de la courbe sur les plans des coordonnées : elles doivent évidemment être comprises dans l'équation (K) jointe à $x^2+y^2+z^2=r^2$; il ne s'agit que d'y remplacer l'arc s par son expression en x, y, z, et d'éliminer du résultat l'une ou l'autre des trois variables suivant la projection qu'on voudra obtenir. Supposons premièrement que ce soit z que l'on veuille faire disparaître.

On aura évidemment

$$z'=\frac{z'}{s'},\ z=\sqrt{r^2-x^2-y^2},\ \text{et}\ s'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Afin de suivre le mode d'élimination employé ci-dessus, nous formerons la quantité $r^2z'^2+z^2-r^2$, que nous représenterons encore par $-q$ pour pouvoir profiter de la transformée (L).

Si l'on prend la valeur de z', savoir : $-\frac{xx'+yy'}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, et qu'on la substitue dans l'expression de s', on change cette dernière en

$$s'=\sqrt{\frac{(x'^2+y'^2)(r^2-x^2-y^2)+(xx'+yy')^2}{r^2-x^2-y^2}}$$

d'où

$$z'^2=\frac{z'^2}{s'^2}=\frac{(xx'+yy')^2}{(x'^2+y'^2)(r^2-x^2-y^2)+(xx'+yy')^2}$$

$$r^2z'^2+z^2-r^2=\frac{(r^2-x^2-y^2)(xx'+yy')^2-(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)(r^2-x^2-y^2)}{(x'^2+y'^2)(r^2-x^2-y^2)+(xx'+yy')^2}$$

$$-q=-\frac{(xy'-yx')^2(r^2-x^2-y^2)}{r^2(x'^2+y'^2)^2-(xy'-yx')^2}.$$

Mettant pour q cette fonction de x, y dans

$$\frac{q''}{q'}-2\frac{q'}{q}-\frac{z''}{z'}-2\varepsilon s'=0,$$

et y remplacant en même-temps z et s' par leurs expressions en x et y, on aura l'équation de la projection sur le plan horizontal; cela fait, au moyen des expressions $x=\sqrt{r^2-y^2-z^2}$ et $y=\sqrt{r^2-x^2-z^2}$, on en déduira à volonté l'équation de

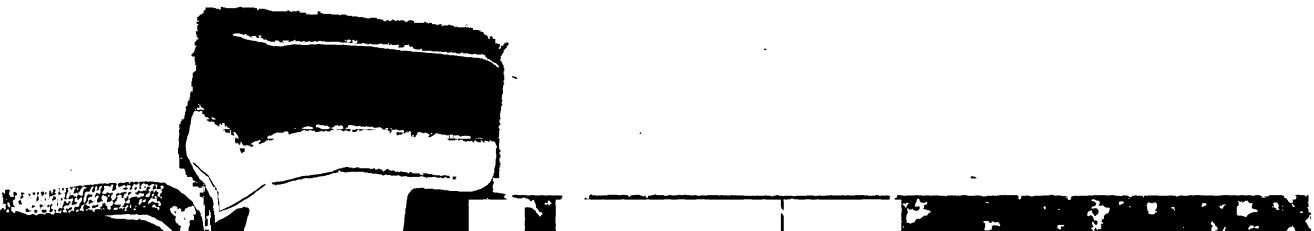
la projection sur le plan des yz, ou celle de la projection sur le plan des xz; nous nous dispenserons d'écrire toutes ces équations, parce que leur forme compliquée les rend difficiles à employer dans les applications, et que d'ailleurs l'équation (M) est elle même celle de la projection sur le plan des xy, puisqu'on a, (pag. 24)

$$p = arc\left(\cos = \frac{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}{r}\right),$$

et quoique cette même équation (M) soit particularisée par l'hypothèse de simplification

$$u' = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = 1,$$

on pourra, dès qu'il sera nécessaire, lui rendre toute la généralité possible, en y remplacant p', p'' et p''' par

$$\frac{p'}{u'};\ \frac{p''}{u'^2} - \frac{p'u''}{u'^3};\ \frac{p'''}{u'^3} - \frac{p'u''' + 3p''u''}{u'^4} + 3\frac{p'u''^2}{u'^5}.$$

FIN.